

# Diffusion thermique non-stationnaire dans des milieux multicouches et problème aux valeurs propres—1. Une paroi unique multicouches

M. BOUZIDI†

Laboratoire de Thermique du C.N.A.M., 292, rue Saint-Martin, 75141 Paris Cedex 03, France

(Reçu le 22 décembre 1989 et sous forme finale le 5 juin 1990)

**Résumé**—On propose un modèle analytique pour le traitement du problème de diffusion thermique non-stationnaire et unidirectionnelle dans une paroi multicouches plane, cylindrique ou sphérique. Ce modèle est basé sur la technique des transformations intégrales et sur le formalisme des matrices de transfert pour résoudre respectivement le problème homogène aux limites et le problème aux valeurs propres qui n'est pas du type Sturm–Liouville conventionnel à cause de la discontinuité des coefficients. Pour le calcul des valeurs propres en vue d'une exploitation numérique du modèle, on présente une procédure fiable car les méthodes classiques n'écartent pas le risque d'en oublier au cours de leur calcul.

## 1. INTRODUCTION

LE PROBLÈME de la diffusion thermique dans les matériaux composites a de nombreuses applications dans des domaines industriels variés. Dans toutes ces applications, une bonne connaissance du comportement thermique de ces matériaux est essentielle. Parmi les différents types de composites solides existants, on considère, ici, uniquement les composites multicouches. Plus précisément, on s'intéresse aux problèmes mathématiques liés aux transferts thermiques dans de tels composites. Il existe en effet, des méthodes analytiques diverses pour l'analyse de ces problèmes. L'avantage de ces méthodes (malheureusement limitées aux problèmes linéaires) est qu'elles permettent une bonne compréhension physique des phénomènes de transfert au sein du système étudié, contrairement aux méthodes purement numériques fournissant des résultats dont l'interprétation reste délicate.

Parmi les méthodes de résolution analytique permettant d'obtenir des solutions exactes, on peut citer la transformation de Laplace [1–14], les fonctions de Green [11, 15–19], la technique du développement orthogonal [11, 20–34] et la transformation intégrale finie [11, 35–41].

Dans cet article, on utilise la technique de la transformation intégrale finie qui conduit nécessairement, comme les autres méthodes, à un problème singulier de Sturm–Liouville dont la solution passe par le calcul des valeurs propres et des fonctions propres correspondantes. Par ailleurs, la fiabilité des méthodes analytiques précitées dépend en grande partie de la technique numérique utilisée pour la résolution de l'équation transcendante aux valeurs propres car le

risque d'oubli de valeurs propres n'est pas écarté au cours de leur calcul. Vue l'importance de cette étape de résolution, sa discussion n'a pas été souvent abordée dans la littérature et notamment dans les publications citées ci-dessus.

Dans les références [27, 36, 42–46], les auteurs ont présenté des résultats numériques pour l'analyse des composites multicouches avec ou sans résistances interfaciales sans toutefois préciser les techniques numériques utilisées pour le calcul des valeurs propres. Les méthodes de Newton et de Raphson–Newton alliée à une méthode graphique, ont été appliquées pour résoudre les équations aux valeurs propres résultant respectivement de la diffusion de masse dans un cylindre composite avec des résistances interfaciales [46] et de la diffusion thermique dans un mur multicouches [47]. Pour étudier les facteurs de réponse d'une plaque multicouches, Hittle et Bishop [48] ont utilisé une méthode de sécante pour calculer les racines de l'équation transcendante. Ju et Lee [49] ont développé une procédure basée sur l'un des résultats de Sturm et Liouville et l'usage de la méthode de Newton pour la recherche des valeurs propres et des fonctions propres d'un problème avec des coefficients discontinus. Duhamel et Gosse [23] et Bouzidi [20] ont appliqué la méthode de Newton alliée à une dichotomie avec un test vérificatif permettant de comparer le développement de la condition initiale du problème non-stationnaire sur une base propre à la condition initiale imposée.

Hodges [50] a appliqué une procédure basée sur la méthode de Ritz déjà développée par Bailey [51] pour calculer les valeurs propres des systèmes de Sturm–Liouville avec des coefficients discontinus. Horgan et Nemat-Nasser [52] ont utilisé une technique de Rayleigh–Ritz pour encadrer les valeurs propres du même type de problèmes précédemment cités. Pour le traitement numérique des problèmes avec des

† Aussi : Université Paris 6, UFR 23, Tour 66, 75252 Paris Cedex 05, France.

## NOMENCLATURE

$a'_j$	diffusivité thermique de la $j$ ème couche, $\lambda'_j/\rho'_j c'_j$	$S_j(x, t)$	température réduite pour le problème pseudo-stationnaire
$a_j(\mu, x)$	fonction, Tableau 2	$t', (t)$	temps (réduit), $t = t' a'_1 / e_1'^2$
$A_j, B_j$	constantes, équation (5a)	$T'_j(x', t), (T_j(x, t))$	distribution de température (réduite) dans la couche $j$ ,
$b'_j$	effusivité thermique de la $j$ ème couche, $(\lambda'_j \rho'_j c'_j)^{1/2}$	$T_j = (T'_j - T'_0) / \Delta T'$	$\Delta T'$ : écart de température
$b_j(\mu, x)$	fonction, Tableau 2	$T_{a1}(t), T_{an}(t)$	températures des milieux environnants les deux faces externes de la paroi
$c'_j$	chaleur massique de la $j$ ème couche	$T'_0$	température de référence
$c_j(\mu, x)$	fonction, Tableau 2	$u_j(\mu, x), v_j(\mu, x)$	fonctions, Tableau 1
$C_k(t)$	fonction, équation (8a)	$V_j(x)$	fonction définie dans l'équation (3f)
$d_j(\mu, x)$	fonction, Tableau 2	$W_j(x)$	fonction définie dans l'équation (1f)
$D_j$	constante, équation (5i)	$x', (x)$	coordonnée d'espace (réduite), $x = x_{j-1} + r_j$
$e'_j, (e_j)$	épaisseur (réduite) de la $j$ ème couche, $e_j = (e'_j / e'_1) (a'_1 / a'_j)^{1/2}$	$X_{jk}(\mu_k, x)$	$k$ ème fonction propre dans la couche $j$
$F_{jk}(\mu_k, x)$	densité de flux associée à la $k$ ème fonction propre	$y_k(t)$	fonction définie par l'équation (8e)
$g_k$	fonction définie par l'équation (8f)	$z$	paramètre, Section 6.
$h', (h)$	conductance surfacique (réduite), $h = h' / H'$		
$H'$	conductance de la couche 1, $\lambda'_1 / e'_1$		
$I(\mu)$	nombre total de valeurs propres, équation (11a)		
$I_c(\mu), I_{nc}(\mu)$	nombre total de valeurs propres d'un système contraint et non- contraint respectivement, Section 6		
$I_0(\mu)$	nombre total de valeurs propres quand toutes les couches sont découplées, équation (11d)		
$I_{0j}(\mu)$	nombre total de valeurs propres de la $j$ ème couche découplée, équation (11f)		
$J_0, Y_0$	fonctions de Bessel de première et deuxième espèce, respectivement		
$K_c(\mu)$	équation aux valeurs propres d'un système contraint, équations (9c) et (9e)		
$K_i(\mu)$	équation aux valeurs propres relative à $i$ couches couplées		
$K_{nc}(\mu)$	équation aux valeurs propres d'un système non-contraint, équation (9b)		
$m$	exposant propre à la géométrie du problème		
$M_j$	constante, Tableau 2		
$n$	nombre total de couches		
$N_k$	norme définie par l'équation (7h)		
$p'_j(x', t), (p_j(x, t))$	source volumique de chaleur (réduite), $p_j(x, t) = (p'_j(x', t) e_1'^2) / (a'_1 \rho'_j c'_j \Delta T')$		
$r'_j, (r_j)$	variable locale (réduite), $r_j = (r'_j / e'_1) (a'_1 / a'_j)^{1/2}$		
$R(\mu)$	rapport entre deux équations aux valeurs propres, Section 6		
$s\{R'(\mu)\}$	nombre de signes négatifs des rapports $R(\mu)$ , équation (11a)		
		<b>Symboles grecs</b>	
		$\alpha_n, \alpha_n$	paramètres, équations (1b) et (1c)
		$(\alpha), (\beta)$	deux sous-systèmes, Section 6
		$\beta_j$	effusivité thermique réduite de la couche $j, b'_j / b'_1$
		$[\Gamma_j(\mu, x_j)]$	matrice de transfert d'ordre 2 de la couche $j$ , équation (5k)
		$\varepsilon_j(\mu, x_j)$	équation aux valeurs propres de la couche $j$ indépendante, équation (11c)
		$\theta_{ij}(x, t)$	température réduite, solution du problème homogène aux limites
		$\tilde{\theta}_k(0)$	transformation intégrale de la condition initiale, définie par l'équation (8f)
		$\tilde{\theta}_k(t)$	transformation intégrale de la température définie par l'équation (8h)
		$\lambda'_j$	conductivité thermique de la couche $j$
		$\mu, \mu_k$	paramètre valeur propre et la $k$ ème valeur propre respectivement
		$\xi_i(\mu), \eta_i(\mu), \chi_i(\mu), \zeta_i(\mu)$	coefficients de la matrice de transfert $[\Gamma_j(\mu, x_j)]$ , relation (5k)
		$\rho'_j$	masse volumique de la couche $j$
		$\phi_j(x, t), \Phi_j(x, t)$	densités de flux réduites des problèmes respectifs original et homogène aux limites
		$\Omega(\mu)$	fonction définie par l'équation (7h).
		<b>Indices</b>	
		$j$	indice de couche $j, j = 1, 2, \dots, n$
		$k$	indice de valeur propre et fonction propre, $k = 1, 2, \dots$

coefficients discontinus, Babuska et Osborn [53] ont appliqué la méthode de Ritz-Galerkine.

Toutes les procédures utilisées dans les références précitées n'écartent pas du tout le risque d'oubli de valeurs propres aux cours de leurs calcul.

Dans une publication très intéressante [54], Mikhailov *et al.* ont appliqué un algorithme efficace pour le calcul des fréquences naturelles de vibration de structures élastiques, développé par Wittrick et Williams [55], à l'analyse des problèmes de diffusion dans des composites multicouches. Cet algorithme permet de connaître exactement le nombre de valeurs propres inférieures à une valeur donnée positive du paramètre valeur propre, sans avoir à les calculer explicitement. Cette application directe est facilitée par le fait que l'équation aux valeurs propres utilisée dans [54] se présente de la même manière que celle dans [55]. Par contre, la méthode utilisée ici comme dans [20, 23, 24], pour l'obtention de l'équation aux valeurs propres est très différente de celle décrite dans [54, 55].

Dans une publication récente [56], nous avons développé un algorithme fiable qui permet une connaissance préalable exacte et le calcul du nombre de valeurs propres pour une valeur positive quelconque du paramètre valeur propre. La mise au point de cet algorithme a été appliqué au cas d'une paroi multicouches plane grâce à l'exploitation de l'analogie entre les problèmes de diffusion et ceux de vibrations de structures dans le cas des milieux continus par morceaux et l'usage d'un des théorèmes de Rayleigh [57] qui est applicable aux vibrations d'une structure linéairement élastique [55].

Le but de cet article est de proposer un modèle analytique basé sur l'usage du formalisme des matrices de transfert pour la résolution du problème aux valeurs propres et la technique de la transformation intégrale finie pour l'obtention de la solution du problème homogène aux limites. Pour la fiabilité de ce modèle analytique, une attention particulière sera portée sur l'analyse du problème aux valeurs propres et plus précisément le calcul des valeurs propres et ceci en généralisant le cas de la référence [56] pour l'appliquer aux parois multicouches cylindriques et sphériques.

## 2. FORMULATION DU PROBLEME

Nous nous proposons de traiter le problème de diffusion thermique à une dimension en régime non-stationnaire dans une paroi composite constituée de  $n$  couches en géométrie plane, cylindrique ou sphérique comme le montre la Fig. 1. Chaque couche  $j$ , d'épaisseur  $e'_j$  est homogène et isotrope et ses propriétés thermophysiques  $\rho'_j$ ,  $c'_j$  et  $\lambda'_j$  sont constantes. Pour généraliser cette étude, il est tenu compte des résistances thermiques interfaciales  $1/h'_j$  ( $h'_j$  étant le coefficient du film à l'interface  $x = x'_j$ ,  $j = 1, \dots, (n-1)$ ) et des sources de chaleur volumique  $p'_j(x', t')$  fonctions de l'espace et du temps. L'échange de chaleur entre les deux faces externes de la paroi composite et les deux

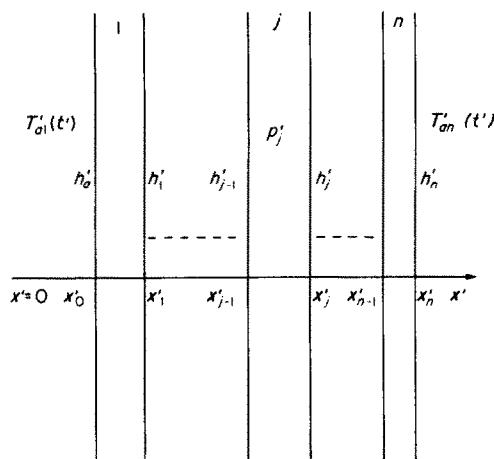


FIG. 1. Modèle de paroi à  $n$  couches parallèles.

milieux environnants respectivement à températures  $T'_{a1}(t')$  et  $T'_{an}(t')$  se fait par l'intermédiaire des coefficients constants  $h'_a$  et  $h'_n$ . Dans chaque couche  $j$ , la distribution de température à l'instant initial est  $T'_j(x', 0) = W'_j(x')$ .

Afin de simplifier l'écriture des équations régissant le transfert thermique dans la paroi multicouches, on introduit les grandeurs adimensionnelles suivantes :

$$T_j = \frac{T'_j - T'_0}{\Delta T'}, \quad t = \frac{a'_1}{e'^2_1} t' \quad \text{avec } e'_1 = x'_1 - x'_0$$

$$r_j = \frac{r'_j}{e'_1} \left( \frac{a'_1}{a'_j} \right)^{1/2} \quad \text{avec } r'_j = x' - x'_{j-1}$$

et on pose  $x$  qui est fonction de la variable locale  $r_j$  sous la forme :

$$x = x_{j-1} + r_j, \quad 0 \leq r_j \leq e_j, \quad j = 1, \dots, n$$

avec

$$x_j = x_{j-1} + e_j \quad \text{où } x_0 = \frac{x'_0}{e'_1}$$

Dans ces conditions, la distribution transitoire de température est gouvernée par l'équation de diffusion avec un terme de source

$$\frac{\partial}{\partial t} T_j(x, t) = x^{-m} \frac{\partial}{\partial x} \left[ x^m \frac{\partial}{\partial x} T_j(x, t) \right] + p_j(x, t)$$

$$t > 0, \quad x_{j-1} < x < x_j, \quad j = 1, \dots, n \quad (1a)$$

où  $m$  prend la valeur 0, 1 ou 2 pour respectivement un problème plan, cylindrique ou sphérique. A l'équation (1a) sont associées les conditions

$$\varphi_1(x, t) = h_a [T_{a1}(t) - \alpha_a T_1(x, t)]$$

$$x = x_0, \quad t > 0 \quad (1b)$$

$$\varphi_n(x, t) = h_n [\alpha_n T_n(x, t) - T_{an}(t)]$$

$$x = x_n, \quad t > 0 \quad (1c)$$

aux limites externes, et

$$\varphi_j(x, t) = \varphi_{j+1}(x, t) \tag{1d}$$

$$T_j(x, t) = T_{j+1}(x, t) + \varphi_j(x, t)/h_j \tag{1e}$$

aux limites interfaciales en  $x = x_j, j = 1, \dots, (n-1)$  pour  $t > 0$ , en ayant défini  $\varphi_j(x, t)$  par

$$\varphi_j(x, t) = -\beta_j \frac{\partial}{\partial x} T_j(x, t)$$

où  $\beta_j = b'_j/b'_1$  (effusivité thermique réduite) et  $h$  par  $h'/H'$ , où  $H' = \lambda'_1/e'_1$ . La condition initiale est

$$T(x, 0) = W_j(x), \quad x_{j-1} < x < x_j, \tag{1f}$$

$$j = 1, \dots, n \text{ pour } t = 0.$$

Si la résistance interfaciale  $1/h_j$  est nulle c'est à dire quand  $h_j \rightarrow \infty$ , l'équation (1e) se réduit à une continuité de température

$$T_j(x_j, t) = T_{j+1}(x_j, t), \quad t > 0$$

$$x = x_j, \quad j = 1, \dots, (n-1). \tag{1g}$$

Par un choix approprié des valeurs des paramètres  $\alpha_a$  et  $\alpha_n$ , on peut obtenir diverses combinaisons de deux des conditions aux limites de première, de deuxième et de troisième espèce non-stationnaires sur les deux limites externes, équations (1b) et (1c). Le cas spécial où  $\alpha_a = \alpha_n = 0$  et  $h_a$  et  $h_n$  sont finies n'est pas considéré ici.

### 3. DECOMPOSITION DU PROBLEME GENERAL

La solution formelle du problème défini par les équations (1) s'obtenant sous forme de séries a l'inconvénient de ne pas converger uniformément aux endroits des discontinuités et surtout aux limites non-homogènes (phénomène de Gibbs [59]) quand on effectue le calcul numérique. Pour éviter cet inconvénient, on décompose ce problème en deux: l'un non-stationnaire et aux limites homogènes en  $\theta_j(x, t)$ , l'autre pseudo-stationnaire et non-homogène en  $S_j(x, t)$ . Ainsi, on pose

$$T_j(x, t) = S_j(x, t) + \theta_j(x, t). \tag{2}$$

En substituant la relation (2) dans les équations (1), on obtient le problème homogène aux limites ci-dessous. Sachant que l'équation de diffusion en régime pseudo-stationnaire est

$$\frac{d}{dx} \left[ x^m \beta_j \frac{d}{dx} S_j(x, t) \right] = 0$$

l'équation (1a) prend la forme

$$\frac{\partial}{\partial t} \theta_j(x, t) = x^{-m} \frac{\partial}{\partial x} \left[ x^m \frac{\partial}{\partial x} \theta_j(x, t) \right]$$

$$+ p_j(x, t) - \frac{\partial}{\partial t} S_j(x, t)$$

$$t > 0, \quad x_{j-1} < x < x_j, \quad j = 1, \dots, n. \tag{3a}$$

Les conditions aux limites externes (1b) et (1c) deviennent

$$\phi_1(x, t) = -\alpha_a h_a \theta_1(x, t), \quad x = x_0, t > 0 \tag{3b}$$

$$\phi_n(x, t) = \alpha_n h_n \theta_n(x, t), \quad x = x_n, t > 0 \tag{3c}$$

et les conditions aux limites interfaciales (1d) et (1e) s'écrivent

$$\phi_j(x, t) = \phi_{j+1}(x, t) \tag{3d}$$

$$\theta_j(x, t) = \theta_{j+1}(x, t) + \phi_j(x, t)/h_j \tag{3e}$$

$$\text{en } x = x_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad t > 0$$

en ayant défini  $\phi_j(x, t)$  par

$$\phi_j(x, t) = -\beta_j \frac{\partial}{\partial x} \theta_j(x, t).$$

La condition initiale (1f) se transforme en

$$\theta_j(x, 0) = V_j(x) \equiv W_j(x) - S_j(x, 0)$$

$$t = 0, \quad x_{j-1} < x < x_j, \quad j = 1, \dots, n. \tag{3f}$$

Le cas spécial où  $h_j \rightarrow \infty$ , équation (3e), se réduit à

$$\theta_j(x, t) = \theta_{j+1}(x, t), \quad x = x_j$$

$$j = 1, \dots, (n-1), \quad t > 0. \tag{3g}$$

L'usage de la technique de la transformation intégrale finie pour la résolution de ce problème homogène aux limites défini par les équations (3) nécessite celle du problème aux valeurs propres associé suivant défini par l'équation différentielle

$$\frac{d}{dx} \left[ x^m \frac{d}{dx} X_j(\mu, x) \right] + \mu^2 x^m X_j(\mu, x) = 0$$

$$x_{j-1} < x < x_j, \quad j = 1, \dots, n \tag{4a}$$

soumise aux conditions aux limites externes

$$F_1(\mu, x) + \alpha_a h_a X_1(\mu, x) = 0, \quad x = x_0 \tag{4b}$$

$$F_n(\mu, x) - \alpha_n h_n X_n(\mu, x) = 0, \quad x = x_n \tag{4c}$$

et

$$F_j(\mu, x) - F_{j+1}(\mu, x) = 0 \tag{4d}$$

$$X_j(\mu, x) - X_{j+1}(\mu, x) - F_j(\mu, x)/h_j = 0 \tag{4e}$$

aux limites interfaciales en  $x = x_j, j = 1, \dots, (n-1)$  en ayant défini

$$F_j(\mu, x) = -\beta_j \frac{d}{dx} X_j(\mu, x).$$

La solution de ce problème aux valeurs propres, s'obtenant en faisant usage du formalisme des matrices de transfert, est décrite dans la section suivante.

### 4. RESOLUTION DU PROBLEME AUX VALEURS PROPRES

Les fonctions  $X_j(\mu, x)$  qui résolvent l'équation différentielle (4a) sont de la forme

$$X_j(\mu, x) = A_j u_j(\mu, x) + B_j v_j(\mu, x) \quad (5a)$$

où  $A_j$  et  $B_j$  sont des constantes et  $u_j(\mu, x)$  et  $v_j(\mu, x)$  sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation (4a). Ces fonctions sont données par le Tableau 1 pour les géométries plane, cylindrique et sphérique. De même, on peut écrire

$$F_j(\mu, x) = -\beta_j [A_j u'_j(\mu, x) + B_j v'_j(\mu, x)] \quad (5b)$$

où le prime désigne la dérivée première par rapport à  $x$ . Les constantes  $A_j$  et  $B_j$  sont calculées en fonction de  $X_j(\mu, x_{j-1})$  et  $F_j(\mu, x_{j-1})$  en évaluant les équations (5a) et (5b) pour  $x = x_{j-1}$  et en résolvant le système linéaire résultant de ces deux équations. En introduisant les expressions de  $A_j$  et  $B_j$  dans les équations (5a) et (5b), on obtient, sous une forme matricielle

$$\begin{bmatrix} X_j(\mu, x) \\ F_j(\mu, x) \end{bmatrix} = [\Gamma_j(\mu, x)] \begin{bmatrix} X_j(\mu, x_{j-1}) \\ F_j(\mu, x_{j-1}) \end{bmatrix}, \quad j = 1, \dots, n \quad (5c)$$

avec

$$[\Gamma_j(\mu, x)] = \begin{bmatrix} a_j(\mu, x) & b_j(\mu, x) \\ c_j(\mu, x) & d_j(\mu, x) \end{bmatrix} \quad (5d)$$

où les éléments de cette matrice valent

$$a_j(\mu, x) = [v_j(\mu, x)u'_j(\mu, x_{j-1}) - u_j(\mu, x)v'_j(\mu, x_{j-1})]\beta_j/D_j \quad (5e)$$

$$b_j(\mu, x) = [v_j(\mu, x)u_j(\mu, x_{j-1}) - u_j(\mu, x)v_j(\mu, x_{j-1})]/D_j \quad (5f)$$

$$c_j(\mu, x) = [u'_j(\mu, x)v'_j(\mu, x_{j-1}) - v'_j(\mu, x)u'_j(\mu, x_{j-1})]\beta_j^2/D_j \quad (5g)$$

$$d_j(\mu, x) = [u'_j(\mu, x)v_j(\mu, x_{j-1}) - v'_j(\mu, x)u_j(\mu, x_{j-1})]\beta_j/D_j \quad (5h)$$

avec

$$D_j = [u'_j(\mu, x_{j-1})v_j(\mu, x_{j-1}) - v'_j(\mu, x_{j-1})u_j(\mu, x_{j-1})]. \quad (5i)$$

Tableau 1. Solutions linéairement indépendantes  $u_j(\mu, x)$  et  $v_j(\mu, x)$  de l'équation (4a) pour la plaque, le cylindre et la sphère

Géométrie	$m$	$u_j(\mu, x)$	$v_j(\mu, x)$
Plaque	0	$\cos(\mu x)$	$\sin(\mu x)$
Cylindre†	1	$J_0(\mu x)$	$Y_0(\mu x)$
Sphère†	2	$\cos(\mu x)/x$	$\sin(\mu x)/x$

†  $x_0 > 0$ .

Le Tableau 2 montre les fonctions  $a_j(\mu, x)$ ,  $b_j(\mu, x)$ ,  $c_j(\mu, x)$  et  $d_j(\mu, x)$  pour les géométries plane, cylindrique et sphérique.

On peut noter que, pour  $x = x_{j-1}$ , les fonctions  $a_j(\mu, x)$ ,  $b_j(\mu, x)$ ,  $c_j(\mu, x)$  et  $d_j(\mu, x)$  prennent des valeurs particulières, ce qui implique :

$$[\Gamma_j(\mu, x_{j-1})] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5j)$$

et pour  $x = x_j$ , la matrice carrée  $[\Gamma_j(\mu, x_j)]$  d'ordre 2, telle que

$$[\Gamma_j(\mu, x_j)] = \begin{bmatrix} a_j(\mu, x_j) & b_j(\mu, x_j) \\ c_j(\mu, x_j) & d_j(\mu, x_j) \end{bmatrix} \quad (5k)$$

appelée matrice de transfert, permet d'exprimer  $X_j(\mu, x_j)$  et  $F_j(\mu, x_j)$  en fonction de leur homologue en  $x = x_{j-1}$ .

En écrivant les conditions interfaciales, équations (4d) et (4e), sous une forme matricielle

$$\begin{bmatrix} X_{j+1}(\mu, x_j) \\ F_{j+1}(\mu, x_j) \end{bmatrix} = [R_j] \begin{bmatrix} X_j(\mu, x_j) \\ F_j(\mu, x_j) \end{bmatrix}, \quad j = 1, \dots, (n-1) \quad (6a)$$

où

$$[R_j] = \begin{bmatrix} 1 & -1/h_j \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6b)$$

et compte tenu de (5c) et (5k), on obtient

$$\begin{bmatrix} X_n(\mu, x_n) \\ F_n(\mu, x_n) \end{bmatrix} = \prod_{j=n}^1 [\Gamma_j(\mu, x_j)][R_{j-1}] \begin{bmatrix} X_1(\mu, x_0) \\ F_1(\mu, x_0) \end{bmatrix} \quad (6c)$$

où par convention,  $[R_0]$  est une matrice unité et l'on pose

$$\begin{bmatrix} \xi_n(\mu) & \eta_n(\mu) \\ \zeta_n(\mu) & \chi_n(\mu) \end{bmatrix} = \prod_{j=n}^1 [\Gamma_j(\mu, x_j)][R_{j-1}]. \quad (6d)$$

Les éléments  $\xi_n(\mu)$ ,  $\zeta_n(\mu)$ ,  $\eta_n(\mu)$  et  $\chi_n(\mu)$  de cette matrice globale de transfert se calculent sans difficulté par récurrence

$$\xi_j(\mu) = (\xi_{j-1} - \zeta_{j-1}/h_{j-1})a_j(\mu, x_j) + \zeta_{j-1}b_j(\mu, x_j) \quad (6e)$$

$$\eta_j(\mu) = (\eta_{j-1} - \chi_{j-1}/h_{j-1})a_j(\mu, x_j) + \chi_{j-1}b_j(\mu, x_j) \quad (6f)$$

$$\zeta_j(\mu) = (\zeta_{j-1} - \chi_{j-1}/h_{j-1})c_j(\mu, x_j) + \chi_{j-1}d_j(\mu, x_j) \quad (6g)$$

$$\chi_j(\mu) = (\eta_{j-1} - \chi_{j-1}/h_{j-1})c_j(\mu, x_j) + \chi_{j-1}d_j(\mu, x_j) \quad (6h)$$

où pour  $j = 1$

$$\xi_1(\mu) = a_1(\mu, x_1), \quad \eta_1(\mu) = b_1(\mu, x_1)$$

Tableau 2. Les fonctions  $a_j(\mu, x)$ ,  $b_j(\mu, x)$ ,  $c_j(\mu, x)$  et  $d_j(\mu, x)$  définies par les équations (5e)–(5h)

Géométrie $m$	Plaque $0$	Cylindre $1$	Sphère $0$
$a_j(\mu, x)$	$\cos [\mu(x - x_{j-1})]$	$[Y_0(\mu x)J_0(\mu x_{j-1}) - J_0(\mu x)Y_0(\mu x_{j-1})] / M_j$	$\cos [\mu(x - x_{j-1})] x_{j-1} / x - \sin [\mu(x - x_{j-1})] / \mu x$
$b_j(\mu, x)$	$-\sin [\mu(x - x_{j-1})] / \mu \beta_j$	$-[Y_0(\mu x)J_0(\mu x_{j-1}) - J_0(\mu x)Y_0(\mu x_{j-1})] / M_j \mu \beta_j$	$-\sin [\mu(x - x_{j-1})] x_{j-1} / x \mu \beta_j$
$c_j(\mu, x)$	$\mu \beta_j \sin [\mu(x - x_{j-1})]$	$\mu \beta_j [Y_1(\mu x)J_1(\mu x_{j-1}) - J_1(\mu x)Y_1(\mu x_{j-1})] / M_j$	$\mu \beta_j [1 / \mu^2 x^2 + x_{j-1} / x] \sin [\mu(x - x_{j-1})] + \beta_j [x_{j-1} / x^2 - 1 / x] \cos [\mu(x - x_{j-1})]$
$d_j(\mu, x)$	$\cos [\mu(x - x_{j-1})]$	$[J_1(\mu x)Y_0(\mu x_{j-1}) - Y_1(\mu x)J_0(\mu x_{j-1})] / M_j$ avec $M_j = [J_1(\mu x_{j-1})Y_0(\mu x_{j-1}) - Y_1(\mu x_{j-1})J_0(\mu x_{j-1})]$	$\cos [\mu(x - x_{j-1})] x_{j-1} / x - \sin [\mu(x - x_{j-1})] x_{j-1} / x^2 \mu$

$$\zeta_1(\mu) = c_1(\mu, x_1), \quad \chi_1(\mu) = d_1(\mu, x_1).$$

La récurrence est initialisée par

$$\xi_0(\mu) \equiv a_1(\mu, x_0) = 1, \quad \eta_0(\mu) \equiv b_1(\mu, x_0) = 0$$

$$\zeta_0(\mu) \equiv c_1(\mu, x_0) = 0, \quad \chi_0(\mu) \equiv d_1(\mu, x_0) = 1.$$

L'introduction des conditions aux limites externes, équations (4b) et (4c), dans la double équation (6a) permet d'écrire

$$\Omega(\mu) X_1(\mu, x_0) = 0 \tag{7a}$$

où

$$\Omega(\mu) = [\xi_n(\mu) - \alpha_n h_n \eta_n(\mu)] - \frac{1}{\alpha_n h_n} [\zeta_n(\mu) - \alpha_n h_n \chi_n(\mu)]. \tag{7b}$$

Clairement, l'équation (7a) a une solution non triviale seulement si

$$\Omega(\mu) = 0. \tag{7c}$$

Les valeurs propres du problème de Sturm–Liouville, défini par les équations (4), sont les valeurs  $\mu_k$  pour lesquelles  $\Omega(\mu) = 0$ . L'équation (7c) est une équation transcendante qui a un nombre infini de racines positives. La recherche de ces racines qui ne peut être obtenue que numériquement, surtout quand  $n > 1$ , est sans doute l'étape la plus délicate car les méthodes numériques classiques présentent le risque d'en oublier au cours du calcul. Ainsi, une procédure fiable pour calculer les valeurs propres sera décrite dans la Section 6.

L'équation aux valeurs propres étant maintenant connue, on peut calculer les fonctions propres  $X_j(\mu_k, x)$  notées  $X_{jk}(x)$ , solutions de l'équation différentielle (4a) et vérifiant les conditions aux limites, équations (4a)–(4e). Les  $X_{jk}(x)$ , de même que les  $F_{jk}(x)$ , dépendent de deux constantes inconnues  $X_{jk}(x_{j-1})$  et  $F_{jk}(x_{j-1})$ , vue la double équation (5c). Ces deux constantes, s'obtenant de la même manière que la double équation (6c) avec des indices appropriés, sont linéairement dépendantes des seules inconnues  $X_{1k}(x_0)$  et  $F_{1k}(x_0)$ . Ainsi, à l'aide de la condition externe (4b), on obtient les fonctions propres  $X_{jk}(x)$ , solutions du problème aux valeurs propres, soit :

$$X_{jk}(x) = X_{1k}(x_0) [Y_{j-1k} a_{jk}(x) + Z_{j-1k} b_{jk}(x)] \tag{7d}$$

où

$$Y_{j-1k} = \xi_{j-1k}(x_{j-1}) - \alpha_n h_n \eta_{j-1k}(x_{j-1})$$

$$Z_{j-1k} = \zeta_{j-1k}(x_{j-1}) - \alpha_n h_n \chi_{j-1k}(x_{j-1}).$$

De même, on peut écrire

$$F_{jk}(x) = X_{1k}(x_0) [Y_{j-1k} c_{jk}(x) + Z_{j-1k} d_{jk}(x)]. \tag{7e}$$

Pour chaque valeur propre  $\mu_k$ , les fonctions propres  $X_{jk}(x)$  correspondantes peuvent être déterminées à une constante arbitraire multiplicative près sans que la solution du problème ne soit affectée par la valeur de cette constante étant donné que toutes les com-

posantes de la solution sont normalisées. On peut donc imposer à  $X_{1k}(x_0)$  la valeur 1.

On note que l'approche décrite ici, basée sur le formalisme des matrices de transfert permet un calcul plus direct pour l'obtention des valeurs propres et des fonctions propres que celles utilisées habituellement pour la détermination d'un déterminant d'une matrice  $2n \times 2n$  et la résolution d'un système d'équations d'ordre  $(2n - 1)$  respectivement pour le calcul des valeurs propres et des fonctions propres.

Ayant établi les formes pour le calcul de ces valeurs propres et de ces fonctions propres, il faut maintenant vérifier que celles-ci soient orthogonales. Ainsi, suivant Vodicka [32, 33], on définit un produit scalaire par

$$\langle X_{jk}(x), X_{jl}(x) \rangle = \sum_{j=1}^n \beta_j \int_{x_{j-1}}^{x_j} x^m X_{jk}(x) X_{jl}(x) dx \tag{7f}$$

dans lequel les coefficients de pondération sont des effusivités thermiques réduites  $\beta_j$  au lieu des  $(\rho_j c_j)$  utilisés habituellement. On démontre dans [56] que deux fonctions propres  $X_{jk}(x)$  et  $X_{jl}(x)$  différentes correspondant à deux valeurs propres distinctes  $\mu_k$  et  $\mu_l$  vérifient la condition d'orthogonalité :

$$\langle X_{jk}(x), X_{jl}(x) \rangle = \delta_{kl} N_k \tag{7g}$$

où  $\delta_{kl}$  est le delta de Kronecker et  $N_k$ , l'intégrale de normalisation :

$$N_k \equiv \langle X_{jk}(x), X_{jk}(x) \rangle = \sum_{j=1}^n \beta_j \int_{x_{j-1}}^{x_j} x^m X_{jk}^2(x) dx. \tag{7h}$$

Comme on le verra plus loin, la condition d'orthogonalité (7g) est nécessaire pour établir la solution du problème homogène aux limites en utilisant la technique de la transformation intégrale finie.

**5. SOLUTION DU PROBLEME HOMOGENE AUX LIMITES**

On considère que la représentation des fonctions  $\theta_j(x, t)$  sous la forme

$$\theta_j(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k(t) X_{jk}(x) \tag{8a}$$

est solution du problème homogène aux limites, défini par les équations (3). En multipliant les deux membres de l'équation (8a) par  $\beta_j x^m X_{jk}(x)$  et en intégrant sur l'espace de  $x_{j-1}$  à  $x_j$ , les expressions résultantes sont sommées sur toutes les valeurs de  $j$ ; on détermine  $C_k(t)$ , vue la relation d'orthogonalité (7g). On introduit ensuite l'expression obtenue pour  $C_k(t)$  dans l'équation (8a) et le développement résultant pour  $\theta_j(x, t)$  est décomposé en deux parties pour définir la transformation intégrale

$$\tilde{\theta}_k(t) = \sum_{j=1}^n \beta_j \int_{x_{j-1}}^{x_j} x^m \theta_j(x, t) X_{jk}(x) dx \tag{8b}$$

et la formule d'inversion

$$\theta_j(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_{jk}(x)}{N_k} \tilde{\theta}_k(t). \tag{8c}$$

Le couple de la transformation intégrale, défini par les équations (8b) et (8c) est maintenant appliqué pour résoudre le problème homogène aux limites, équations (3). Les deux membres des équations (3a) et (4a) sont multipliés respectivement par  $\beta_j x^m X_{jk}(x)$  et  $\beta_j x^m \theta_j(x, t)$ , le résultat de l'addition des deux équations résultantes, intégré sur l'espace de  $x_{j-1}$  à  $x_j$  et sommé sur toutes les valeurs de  $j$ , permet d'obtenir, pour la transformation de la température  $\tilde{\theta}_k(t)$  l'équation différentielle ordinaire

$$\frac{d\tilde{\theta}_k(t)}{dt} + \mu_k^2 \tilde{\theta}_k(t) = y_k(t) \tag{8d}$$

où

$$y_k(t) = \sum_{j=1}^n \beta_j \int_{x_{j-1}}^{x_j} x^m X_{jk}(x) [p_j(x, t) - \partial S_j(x, t) / \partial t] dx. \tag{8e}$$

A l'équation (8d) est associée la condition initiale  $\tilde{\theta}_k(0)$  qui est déterminée en construisant la transformation de la condition initiale (3f) conformément à la transformation (8b). On obtient :

$$\tilde{\theta}_k(0) \equiv g_k = \sum_{j=1}^n \beta_j \int_{x_{j-1}}^{x_j} x^m V_j(x) X_{jk}(x) dx. \tag{8f}$$

La solution de l'équation (8d) vérifiant la condition initiale (8f) est

$$\tilde{\theta}_k(t) = \exp(-\mu_k^2 t) \left[ g_k + \int_0^t y_k(\tau) \exp(\mu_k^2 \tau) d\tau \right]. \tag{8g}$$

En introduisant cette expression de  $\tilde{\theta}_k(t)$  dans la formule d'inversion (8c), on obtient alors la solution du problème homogène aux limites, soit :

$$\theta_j(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_{jk}(x)}{N_k} \exp(-\mu_k^2 t) \times \left[ g_k + \int_0^t y_k(\tau) \exp(\mu_k^2 \tau) d\tau \right]. \tag{8h}$$

De la même manière, on peut écrire la densité de flux  $\phi_j(x, t)$  pour ce problème homogène aux limites en remplaçant  $X_{jk}(x)$  par  $F_{jk}(x)$  dont les expressions respectives sont données par (7d) et (7e) dans le second membre de l'équation (8h).

**6. PROCEDURE POUR LE CALCUL DES VALEURS PROPRES**

Dans la référence [58], nous avons décrit d'une façon détaillée l'analogie entre les problèmes de diffusion et ceux de vibration de structures dans le cas des milieux continus par morceaux : ces deux problèmes débouchent sur un problème singulier de Sturm–Liouville.

L'un des théorèmes de Rayleigh [57], qui est applicable aux vibrations de structures linéairement élastiques [55] permet d'écrire la série d'inégalités

$$0 < \dots \mu_k \leq \lambda_k \leq \mu_{k+1}, \dots \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (9a)$$

dans laquelle les valeurs propres  $\mu_k$  d'un système de Sturm–Liouville sont solutions de l'équation transcendante

$$K_{nc}(\mu) = 0 \quad (9b)$$

et les valeurs propres  $\lambda_k$  sont solutions de l'équation aux valeurs propres

$$K_c(\mu) = 0 \quad (9c)$$

en ayant imposé à ce système une contrainte telle que

$$X_q(y_q) = 0, \quad 1 < q < n, \quad y_q = x_{q-1} \text{ ou } x_q \quad (9d)$$

sans que les autres conditions aux limites changent.

Ainsi, nous avons établi une propriété de comptage des valeurs propres basée sur le signe du rapport entre les deux équations (9b) et (9c) : si une contrainte est enlevée à un système, le nombre  $I_{nc}(\mu^*)$  de valeurs propres du système non-contraint n'excédant pas une valeur positive quelconque  $\mu^*$  du paramètre valeur propre  $\mu$  soit est égal au nombre  $I_c(\mu^*)$  de valeurs propres du système contraint, soit est augmenté d'une unité ; d'où la propriété

P1 :

$$\text{si } R(\mu^*) \equiv \frac{K_{nc}(\mu^*)}{K_c(\mu^*)} < 0, \text{ alors } I_{nc}(\mu^*) = I_c(\mu^*) + 1$$

$$\text{sinon, } I_{nc}(\mu^*) = I_c(\mu^*).$$

Cette propriété P1 a constitué la base de l'algorithme que nous avons développé dans [58], pour le calcul des valeurs propres dans le cas d'une plaque multicouches. Maintenant on va voir comment on étend ce cas à des géométries cylindrique et sphérique.

**6.1. Calcul du nombre de valeurs propres pour  $\mu \in ]0, \mu^*]$**

L'introduction de la contrainte  $X_q(y_q) = 0$  divise le système original en deux sous-systèmes découplés (ou indépendants) ( $\alpha$ ) et ( $\beta$ ). Dans ce cas, l'équation transcendante aux valeurs propres du système contraint s'écrit :

$$K_c(\mu) \equiv K_\alpha(\mu)K_\beta(\mu) = 0. \quad (9e)$$

L'application de la relation (9e) au problème considéré ici est d'une grande utilité.

En effet, reprenons le problème aux valeurs propres défini par les équations (4) où l'on considère dans un

premier temps, que les  $n$  couches sont en contact parfait ( $h_j \rightarrow \infty, j = 1, \dots, (n-1)$ ) dans l'équation (4e) et l'équation aux valeurs propres (7c) qu'on note ici

$$K'_n(\mu) \equiv \Omega(\mu) = 0. \quad (7c)$$

En imposant une contrainte à une interface donnée à l'intérieur de la paroi multicouches, le système se décompose en deux sous-systèmes ( $\alpha$ ) et ( $\beta$ ). Soit ( $i$ ) le sous-système formé par :

—le sous-système ( $\alpha$ ) où  $i$  couches obéissent aux équations (4) (à l'exception de la condition externe (4c)) et à

$$X_i(x_i) = 0, \quad (10a)$$

—le sous-système ( $\beta$ ) où  $n-i$  couches obéissent à l'équation différentielle (4a) et à

$$X_j(x_{j-1}) = X_j(x_j) = 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (10b)$$

A l'aide de la relation (9e), l'équation aux valeurs propres du système ( $i$ ) contraint s'écrit :

$$K_i(\mu) \prod_{j=i+1}^n \varepsilon_j(\mu) = 0 \quad (10c)$$

où  $K_i(\mu)$  est déduit de l'équation (7c) en posant  $n = i, \alpha_n = 1$  et  $h_n \rightarrow \infty$ , soit :

$$K_i(\mu) = \xi_i(\mu) - \alpha_n h_n \eta_i(\mu). \quad (10d)$$

Les expressions des  $\varepsilon_j(\mu)$  qui sont données plus loin, correspondent aux équations aux valeurs propres du problème dans lequel toutes les couches sont découplées dans le système ( $\beta$ ).

Soit, maintenant, ( $i+1$ ) le système obtenu en supprimant la contrainte  $X_i(x_i) = 0$  dans le système ( $i$ ). La condition à l'interface  $x = x_i$ , entre les couches  $i$  et  $i+1$ , devient

$$X_i(x_i) = X_{i+1}(x_i) \neq 0 \quad (10e)$$

alors que celle à l'interface  $x = x_{i+1}$ , entre les couches  $i+1$  et  $i+2$  est

$$X_{i+1}(x_{i+1}) = 0. \quad (10f)$$

Dans ce nouveau système, les  $i+1$  couches sont couplées entre elles tandis que les  $n-(i+1)$  couches sont découplées. L'équation aux valeurs propres du système ( $i+1$ ) s'écrit alors :

$$K_{i+1}(\mu) \prod_{j=i+2}^n \varepsilon_j(\mu) = 0 \quad (10g)$$

où

$$K_{i+1}(\mu) = \xi_{i+1}(\mu) - \alpha_n h_n \eta_{i+1}(\mu). \quad (10h)$$

Le nombre  $I_{i+1}(\mu^*)$  de valeurs propres n'excédant pas la valeur  $\mu^*$  du paramètre  $\mu$  dans le système ( $i+1$ ) est déduit de la propriété P1 en testant le signe du rapport des équations transcendentes (10c) et (10g)

$$R(\mu^*) \equiv R_{i+1}(\mu^*) = \frac{K_{i+1}(\mu^*)}{K_i(\mu^*)\varepsilon_{i+1}(\mu^*)}, \quad (10i)$$

Si

$$R_{i+1}(\mu^*) < 0, \quad \text{alors } I_{i+1}(\mu^*) = I_i(\mu^*) + 1$$

$$\text{sinon, } I_{i+1}(\mu^*) = I_i(\mu^*).$$

Ainsi, en supprimant les contraintes une à une jusqu'à  $X_n(x_n) = 0$ , on trouve  $R_n(\mu^*)$  et le nombre cherché est  $I_n(\mu^*)$ . A ce stade, la paroi multicouches est encore contrainte. En imposant la condition externe, équation (4c), ce qui permet l'enlèvement de la dernière contrainte  $X_n(x_n) = 0$ , on détermine le dernier rapport

$$R'_n(\mu^*) = \frac{K'_n(\mu^*)}{K_n(\mu^*)} \quad (10j)$$

dont il faut tester le signe pour trouver  $I'_n(\mu^*)$ .  $K_n(\mu^*)$  est l'équation aux valeurs propres s'obtenant à partir de l'équation (10d) en prenant  $i = n$  en ayant imposé la contrainte  $X_n(x_n) = 0$ .

On note que le nombre de rapports  $R(\mu^*)$  dont il faut tester les signes est égal au nombre de couches  $n$  (avec contact parfait) augmenté d'une unité en précisant que le premier rapport est

$$R_1(\mu^*) = \frac{K_1(\mu^*)}{\varepsilon_1(\mu^*)}. \quad (10k)$$

On note également qu'on a autant de conditions aux limites de première espèce sur les faces externes que de rapports  $R(\mu^*)$  en moins car dans ces conditions, ces rapports valent l'unité.

En prenant une forme analogue à celle de Wittrick et Williams [55], on établit une relation donnant le nombre de valeurs propres existant dans l'intervalle  $]0, \mu^*]$ , du problème considéré ici, soit :

$$I(\mu^*) = I_0(\mu^*) + s\{R'_n(\mu^*)\} \quad (11a)$$

où  $s\{R'_n(\mu^*)\}$  désigne le nombre de signes négatifs des rapports  $R(\mu^*)$  et  $I_0(\mu^*)$  est le nombre total de valeurs propres n'excédant pas  $\mu^*$  quand les  $n$  couches de la paroi sont découplées.

Pour trouver  $I_0(\mu^*)$ , on prend en compte le fait que toutes les fonctions propres sont nulles à toutes les interfaces, y compris les faces externes :

$$X_j(x_i) = 0, \quad j-1 \leq i \leq j, \quad j = 1, \dots, n \quad (11b)$$

et le système d'équation (4a) dégénère en un ensemble découplé d'équations. Dans ces conditions, la solution donnée par l'équation (5c) implique  $\varepsilon_j(\mu) \equiv b_j(\mu, x_j) = 0$ , soit :

$$\varepsilon_j(\mu) \equiv v_j(\mu, x_j)u_j(\mu, x_{j-1}) - u_j(\mu, x_j)v_j(\mu, x_{j-1}) = 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (11c)$$

L'équation (11c) qui est une équation transcendante doit être résolue pour chaque couche  $j$  pour déterminer le nombre  $I_{0j}(\mu^*)$  de valeurs propres n'excédant pas  $\mu^*$ . Ainsi le nombre total  $I_0(\mu^*)$  de valeurs propres pour l'ensemble des  $n$  couches découplées est évalué :

$$I_0(\mu^*) = \sum_{j=1}^n I_{0j}(\mu^*). \quad (11d)$$

Dans le cas des géométries plane ( $m = 0$ ) et sphérique ( $m = 2$ ), l'équation (11c) se réduit à

$$\varepsilon_j(\mu^*) \equiv \sin [\mu^*(x_j - x_{j-1})] = 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (11e)$$

Cette équation a une solution explicite

$$\mu^*e_j = l\pi; \quad l = 1, 2, \dots, \quad e_j = x_j - x_{j-1};$$

d'où le calcul de

$$I_{0j}(\mu^*) = \text{ent} \left[ \frac{\mu^*e_j}{\pi} \right] \quad (11f)$$

où la valeur de la fonction ent ( $z$ ) est le plus grand entier n'excédant pas la valeur de l'argument  $z$  de la fonction.

Quant au cas de la paroi multicouches cylindrique ( $m = 1$ ), pour lequel l'équation (11c) a la forme

$$\varepsilon_j(\mu) \equiv J_0(\mu x_{j-1})Y_0(\mu x_j) - Y_0(\mu x_{j-1})J_0(\mu x_j) = 0 \quad (11g)$$

il n'y a pas de formule explicite du type (11f). Cependant, les racines de l'équation transcendante (11g) peuvent être calculées à l'aide des techniques numériques conventionnelles. Ainsi, le nombre  $I_{0j}(\mu^*)$  de valeurs propres n'excédant pas  $\mu^*$  pour chaque couche  $j$  peut être déterminé et  $I_0(\mu^*)$  est alors évalué selon la relation (11d).

On note que dans le cas des conditions aux limites de première espèce, les signes des rapports extrêmes ne sont pas tester car ils sont toujours positifs et valent une unité.

### 6.2. Cas des résistances thermiques interfaciales

La procédure précédemment décrite s'applique directement si le contact thermique entre toutes les couches est parfait. Cependant, cette procédure peut être adaptée aisément pour une application au cas où il existe des résistances thermiques entre deux couches contiguës quelconques.

Pour ce faire, on se place à l'interface  $x = x_i$ , entre les couches  $i$  et  $i+1$  où il y a une résistance thermique  $1/h_i$ . En supprimant la contrainte  $X_i(x_i) = 0$  dans le système (i) et en l'imposant à  $X_{i+1}(x_i) = 0$ , l'équation aux valeurs propres du nouveau système s'écrit :

$$K'_i(\mu) \prod_{j=i+1}^n \varepsilon_j(\mu) = 0 \quad (12a)$$

où

$$K'_i(\mu) = [\xi_i(\mu) - \alpha_a h_n \eta_i(\mu)] - \frac{1}{h_i} [\xi_i(\mu) - \alpha_a h_n \chi_i(\mu)] \quad (12b)$$

est déduit de l'équation (7c) en posant  $n = i$  et  $\alpha_n = 1$ ; d'où le rapport

$$R'_i(\mu^*) = \frac{K'_i(\mu^*)}{K_i(\mu^*)} \tag{12c}$$

dont il faut tester le signe pour déterminer, à l'aide de la propriété P1, un nombre  $I'_i(\mu^*)$  de valeurs propres, qui n'est pas égal à  $I_{i+1}(\mu^*)$  pour  $X_i(x_i)$  différent de  $X_{i+1}(x_i)$  qui est nul. En enlevant la contrainte  $X_{i+1}(x_i) = 0$ , on détermine un nombre  $I_{i+1}(\mu^*)$  correspondant au système  $(i+1)$  en testant le signe du rapport

$$R_{i+1}(\mu^*) = \frac{K_{i+1}(\mu^*)}{K'_i(\mu^*)e_{i+1}(\mu^*)} \tag{12d}$$

On note qu'on a autant de rapports  $R'(\mu^*)$  dont il faut tester les signes que de résistances thermiques interfaciales. Si  $h_i \rightarrow \infty$ ,  $K'_i(\mu^*)$  est identique à  $K_i(\mu^*)$  et  $R'_i(\mu^*) = 1$ .

**7. SOLUTION DU PROBLEME ORIGINAL**

Le problème homogène aux limites étant résolu et la solution du problème pseudo-stationnaire ayant été établie sous une forme générale dans [58] on écrit maintenant la solution du problème original défini par les équations (1), compte tenu de sa décomposition (relation (2)), sous une forme explicite pour une exploitation numérique. On a alors :

pour  $m = 0$

$$T_j(x, t) = \left\{ \left[ 1/h_n + \alpha_n \left( (x_j - x)/\beta_j + \sum_{i=j+1}^n e_i/\beta_i + \sum_{i=j}^{n-1} 1/h_i \right) \right] T_{a1}(t) + \left[ 1/h_n + \alpha_n \left( (x - x_{j-1})/\beta_i + \sum_{i=1}^{j-1} e_i/\beta_i + \sum_{i=1}^{j-1} 1/h_i \right) \right] T_{a2}(t) \right\} \times \left[ \alpha_n/h_n + \alpha_n \alpha_n \left( \sum_{j=1}^n e_j/\beta_j + \sum_{j=1}^{n-1} 1/h_j \right) \right]^{-1} + \sum_{k=1}^s \frac{X_{jk}(x)}{N_k} \exp(-\mu_k^2 t) \times \left[ g_k + \int_0^t (p_k + s_k) \exp(\mu_k^2 \tau) d\tau \right] \tag{13a}$$

pour  $m = 1$

$$T_j(x, t) = \left\{ \left[ \frac{1}{x_n h_n} + \alpha_n \left( \frac{1}{\beta_j} \ln \frac{x_j}{x} + \sum_{i=j+1}^n \frac{1}{\beta_i} \ln \frac{x_j}{x_{i-1}} + \sum_{i=j}^{n-1} \frac{1}{x_i h_i} \right) \right] T_{a1}(t) + \left[ \frac{1}{x_0 h_0} + \alpha_0 \left( \frac{1}{\beta_j} \ln \frac{x}{x_{j-1}} + \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{\beta_i} \ln \frac{x_j}{x_{i-1}} + \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{x_i h_i} \right) \right] T_{a2}(t) \right\} \left[ \frac{\alpha_n}{x_0 h_0} + \frac{\alpha_0}{x_n h_n} \right]$$

$$+ \alpha_n \alpha_n \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{\beta_i} \ln \frac{x_j}{x_{i-1}} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{x_j h_j} \right) \left[ \frac{1}{x_n^2 h_n} + \alpha_n \left( \frac{1}{\beta_j} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x_j} \right) + \sum_{i=j+1}^n \frac{1}{\beta_i} \left( \frac{1}{x_{i-1}} - \frac{1}{x_i} \right) + \sum_{i=j}^{n-1} \frac{1}{x_i^2 h_i} \right) \right] T_{a1}(t) + \left[ \frac{1}{x_0^2 h_0} + \alpha_0 \left( \frac{1}{\beta_j} \left( \frac{1}{x_{j-1}} - \frac{1}{x} \right) + \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{\beta_i} \left( \frac{1}{x_{i-1}} - \frac{1}{x_i} \right) + \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{x_i^2 h_i} \right) \right] T_{a2}(t) \right\} \times \left[ \frac{\alpha_n}{x_0^2 h_0} + \frac{\alpha_0}{x_n^2 h_n} + \alpha_n \alpha_n \left[ \sum_{j=1}^n \frac{1}{\beta_j} \left( \frac{1}{x_{j-1}} - \frac{1}{x_j} \right) + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{x_j^2 h_j} \right] \right]^{-1} + \sum_{k=1}^s \frac{X_{jk}(x)}{N_k} \exp(-\mu_k^2 t) \times \left[ g_k + \int_0^t (p_k + s_k) \exp(\mu_k^2 \tau) d\tau \right] \tag{13b}$$

pour  $m = 2$

$$T_j(x, t) = \left\{ \left[ \frac{1}{x_n^2 h_n} + \alpha_n \left( \frac{1}{\beta_j} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x_j} \right) + \sum_{i=j+1}^n \frac{1}{\beta_i} \left( \frac{1}{x_{i-1}} - \frac{1}{x_i} \right) + \sum_{i=j}^{n-1} \frac{1}{x_i^2 h_i} \right) \right] T_{a1}(t) + \left[ \frac{1}{x_0^2 h_0} + \alpha_0 \left( \frac{1}{\beta_j} \left( \frac{1}{x_{j-1}} - \frac{1}{x} \right) + \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{\beta_i} \left( \frac{1}{x_{i-1}} - \frac{1}{x_i} \right) + \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{x_i^2 h_i} \right) \right] T_{a2}(t) \right\} \times \left[ \frac{\alpha_n}{x_0^2 h_0} + \frac{\alpha_0}{x_n^2 h_n} + \alpha_n \alpha_n \left[ \sum_{j=1}^n \frac{1}{\beta_j} \left( \frac{1}{x_{j-1}} - \frac{1}{x_j} \right) + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{x_j^2 h_j} \right] \right]^{-1} + \sum_{k=1}^s \frac{X_{jk}(x)}{N_k} \exp(-\mu_k^2 t) \times \left[ g_k + \int_0^t (p_k + s_k) \exp(\mu_k^2 \tau) d\tau \right] \tag{13c}$$

où

$$g_k = \langle V_j(x), X_{jk}(x) \rangle$$

$$p_k = \langle p_j(x, \tau), X_{jk}(x) \rangle$$

$$s_k = \left\langle -\frac{\partial}{\partial \tau} S_j(x, \tau), X_{jk}(x) \right\rangle.$$

**8. CONCLUSION**

Le problème de la diffusion thermique non-stationnaire dans des milieux multicouches pour différentes géométries a été formulé et résolu. Pour cela, un modèle analytique, basé sur le formalisme des matrices de transfert et la technique des transformations intégrales, a été développé, ce qui a permis un traitement élégant mathématiquement de ce type de problèmes. La seule difficulté qui résidait dans la résolution de l'équation transcendantale du problème aux valeurs propres a été supprimée en proposant une procédure efficace pour le calcul de ces valeurs propres, d'où la fiabilité entière du modèle analytique. Un exemple d'application qui est un cas spécial de ce modèle est donné dans la réf [58].

**REFERENCES**

1. H. S. Carslaw and J. C. Jaeger, *Conduction of Heat in Solids*. Clarendon Press, Oxford (1959).

2. H. S. Chu, C. I. Weng and C. K. Chen, Transient response of a composite straight fin, *Trans. ASME, Ser. C, J. Heat Transfer* **105**, 307–311 (1983).
3. R. V. Churchill, Temperature distribution in a slab of two layers, *Duke Math. J.* **2**, 405–414 (1936).
4. R. V. Churchill, The solution of linear boundary value problems in physics by means of the Laplace transformation—temperature in a composite wall, *Math. Ann.* **115**, 720–739 (1938).
5. D. Allan, The solution of a special heat and diffusion equation, *Am. Math. Monthly* **63**, 315–323 (1956).
6. M. L. Anthony, Temperature distributions in composite slabs due to a suddenly activated plane heat source, *Proc. Gen. Discuss. Heat Transfer, London* 236–249 (1951).
7. M. L. Anthony, Temperature distributions in slabs with a linear temperature rise at one surface, Part II—distributions in two slabs, *Proc. Gen. Discuss. Heat Transfer, London* 254–261 (1951).
8. S. S. Filimonov and Y. P. Dvin, Temperature calculation in a multilayered wall acted on by a thermal pulse, *Heat Transfer—Sov. Res.* **4**(5), 104–126 (1972).
9. A. C. Giere, Transient heat flow in a composite slab—constant flux, zero flux boundary conditions, *Appl. Scient. Res.* **A14**, 191–198 (1965).
10. T. P. Newcomb, Flow of heat in a composite solid, *Br. J. Appl. Phys.* **1**, 204–206 (1959).
11. M. N. Özisik, *Heat Conduction*. Wiley, New York (1980).
12. A. V. Luikov, *Analytical Heat Diffusion Theory*, Chap. 10, pp. 399–442. Academic Press, New York (1968).
13. V. R. Thiruvenkatachar and B. S. Ramakrishna, A case of combined radial and axial heat flow in composite cylinders, *Q. Appl. Math.* **10**, 259–262 (1952).
14. V. Vodicka, Some problems on heat conduction in stratiform bodies, *J. Phys. Soc. Japan* **14**, 216–224 (1959).
15. J. Baker-Jarvis and R. Inguva, Heat conduction in heterogeneous materials, *Trans. ASME, Ser. C, J. Heat Transfer* **107**, 39–43 (1985).
16. J. Baker-Jarvis and R. Inguva, Heat conduction in layered, composite materials, *J. Appl. Phys.* **57**, 1569–1573 (1985).
17. S. C. Huang and Y. P. Chang, Heat conduction in unsteady, periodic, and steady states in laminated composites, *Trans. ASME, Ser. C, J. Heat Transfer* **102**, 742–748 (1980).
18. W. P. Reid, Linear heat flow in a composite slab, *J. Aerospace Sci.* **29**, 905–908 (1962).
19. S. S. Sareen and D. Gidaspow, Flow of fluids through porous, anisotropic, composite media with sources and sinks: application to fuel cells, *Energy Conv.* **15**, 113–120 (1976).
20. M. Bouzidi, Etude des transferts thermiques dans un mur composite avec conditions aux limites variables. Application aux fours de cuisson d'anodes, Thèse 3ème cycle, Paris VI (1981).
21. P. E. Bulavin and V. M. Kashcheev, Solution of the non-homogeneous heat conduction equation for multilayered bodies, *Int. Chem. Engng* **5**, 112–115 (1965).
22. M. H. Cobble, Heat transfer in composite media subject to distribute sources, and time-dependent discrete sources and surroundings, *J. Franklin Inst.* **292**, 453–465 (1970).
23. P. Duhamel et J. Gosse, Analyse thermique d'un mur composite soumis sur une face à une variation en crêneaux de la température, *Int. J. Heat Transfer* **23**, 1663–1671 (1980).
24. J. Gosse, Sur la conduction thermique variable dans un mur composite à propriétés constantes, *C. R. Acad. Sci., Paris* **B286**, 303–306 (1978).
25. A. C. Giere, An eigenfunction solution of a problem in heat conduction, *Am. J. Phys.* **36**, 994–1000 (1968).
26. E. Mayer, Heat flow in composite slabs, *J. Am. Rocket Soc.* **22**, 150–158 (1958).
27. G. P. Mulholland and M. H. Cobble, Diffusion through composite media, *Int. J. Heat Mass Transfer* **15**, 147–160 (1972).
28. H. Salt, Transient conduction in a two-dimensional composite slab—I. Theoretical development of temperature modes, *Int. J. Heat Mass Transfer* **26**, 1161–1616 (1983).
29. J. R. Thomas and L. A. Coppari, Temperature decay in a reactor vessel subjected to thermal shock: an analytical solution, *Nucl. Engng Des.* **36**, 159–167 (1976).
30. C. W. Tittle, Boundary value problems in composite media: quasi-orthogonal functions, *J. Appl. Phys.* **36**, 1486–1488 (1965).
31. C. W. Tittle and V. L. Robinson, Analytical solution of conduction problems in composite media, ASME Paper 65-WA-HT-52 (1965).
32. V. Vodicka, Wärmeleitung in geschichteten Kugel- und zylinder-körpern, *Sch. Arch.* **10**, 297–304 (1950).
33. V. Vodicka, Eindimensionale wärmeleitung in geschichteten Körpern, *Math. Nach.* **14**, 47–55 (1955).
34. H. C. Yeh, Solving boundary value problems in composite media by separation of variables and transient temperature of a reactor vessel, *Nucl. Engng Des.* **36**, 139–157 (1976).
35. I. M. Fedotkin and A. M. Aizen, A method of solving heat conduction problems with non-ideal thermal contact, *Heat Transfer—Sov. Res.* **6**(3), 79–84 (1974).
36. J. D. Lockwood and G. P. Mulholland, Diffusion through laminated composite cylinders subjected to a circumferentially varying external heat flux, *Trans. ASME, Ser. C, J. Heat Transfer* **95**, 487–491 (1973).
37. M. D. Mikhailov, General solutions of the heat equation in finite regions, *Int. J. Engng Sci.* **10**, 177–191 (1972).
38. M. D. Mikhailov, General solution of the diffusion equations coupled at boundary conditions, *Int. J. Heat Mass Transfer* **16**, 2155–2164 (1973).
39. Y. Ölcer, A general class of unsteady heat flow problems in a finite composite hollow circular cylinder, *Q. Appl. Math.* **26**, 355–371 (1968).
40. J. Padovan, Generalized Sturm–Liouville procedure for composite domain anisotropic transient conduction problems, *AIAA J.* **12**, 1158–1160 (1974).
41. Y. Yener and M. N. Özisik, On the solution of unsteady heat conduction in multi-region finite media with time dependent heat transfer coefficient, *Proc. Int. Heat Transfer Conf.*, Tokyo, Vol. I, pp. 188–192 (1974).
42. J. J. Brogan and P. J. Schneider, Heat conduction in a series composite wall, *Trans. ASME, Ser. C, J. Heat Transfer* **93**, 506–508 (1961).
43. F. M. Camia, Solution de l'équation de la chaleur pour un mur discontinu d'épaisseur finie, *Revue Gén. Thermique* **26**, 149–158 (1964).
44. Z. U. A. Warsi and N. K. D. Choudhury, Weighting function and transient thermal response of buildings—II. Composite structure, *Int. J. Heat Mass Transfer* **7**, 1323–1334 (1964).
45. P. E. Wirth and Y. Rodin, A unified theory of linear diffusion in laminated media, *Adv. Heat Transfer* **15**, 283–330 (1982).
46. J. F. Stevenson, Unsteady mass transfer in a long composite cylinder with interfacial resistances, *A.I.Ch.E. JI* **20**, 461–466 (1974).
47. G. W. Swan and J. J. Dick, Analytic solution for transient heat flow in a shocked composite slab, *J. Appl. Phys.* **45**, 3851–3855 (1974).
48. D. C. Hittle and R. Bishop, An improved root-finding procedure for use in calculating transient heat flow through multilayered slabs, *Int. J. Heat Mass Transfer* **26**, 1685–1693 (1983).
49. Y. H. Ju and W. C. Lee, A method for solving transient diffusion problems, *Numer. Heat Transfer* **9**, 663–676 (1986).
50. D. H. Hodges, Direct solutions for Sturm–Liouville systems with discontinuous coefficients, *AIAA J.* **17**, 924–926 (1979).

51. C. D. Bailey. Exact and direct analytical solutions to vibrating systems with discontinuities. *J. Sound Vibr.* **44**, 15–25 (1976).
52. C. O. Horgan and S. Nemat-Nasser, Bound on eigenvalues of Sturm–Liouville problems with discontinuous coefficients, *ZAMP* **30**, 77–86 (1979).
53. I. Babuska and J. E. Osborn, Numerical treatment of eigenvalue problems for differential equations with discontinuous coefficients, *Math. Comp.* **32**, 991–1023 (1978).
54. M. D. Mikhailov, M. N. Özisik and N. L. Vulchanov, Diffusion in composite layers with automatic solution of the eigenvalue problem, *Int. J. Heat Mass Transfer* **26**, 1131–1141 (1983).
55. W. H. Wittrick and F. W. Williams, A general algorithm for computing natural frequencies of elastic structures, *Q. J. Mech. Appl. Math.* **24**, 263–284 (1971).
56. M. Bouzidi and P. Duhamel. An algorithm for solving the eigenvalue problems associated with heat diffusion in composite slabs, *Numer. Meth. Thermal Problems—Proc. 5th Int. Conf.*, Montréal, Vol. V, pp. 1506–1517 (1987).
57. J. W. S. Rayleigh. *The Theory of Sound*, Vol. I, pp. 119–126. Dover, New York (1945).
58. M. Bouzidi, Contribution à l'étude de la diffusion thermique non-stationnaire dans des parois composites multicouches simples et multiplement couplées, Thèse d'état, Université Paris VI (1989).
59. R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, Vol. I. Interscience, New York (1953).

#### TRANSIENT HEAT DIFFUSION IN MULTILAYERED COMPOSITE MEDIA AND EIGENVALUE PROBLEM—I. A SINGLE MULTILAYERED WALL

**Abstract**—An analytical model for the transient heat diffusion in one-dimensional multilayered slabs, cylinders and spheres, is proposed. This model is based on the finite integral transform and the transfer matrix formalism for solving the boundary homogeneous problem and the eigenvalue problem that is not of the conventional Sturm–Liouville type in this case. For the computation of the eigenvalues in order to obtain the numerical solution, a reliable procedure is presented because the conventional techniques cannot prevent from missing eigenvalues in the course of the computation.

#### LÖSUNG DES EIGENWERT-PROBLEMS BEI DER INSTATIONÄREN WÄRMELEITUNG IN EINEM MEHRSCICHTIG ZUSAMMENGESETZTEN MEDIUM— I. DIE EINZELNE MEHRSCICHTIGE WAND

**Zusammengassung**—Es wird ein analytisches Modell für die instationäre Wärmeleitung in eindimensionalen mehrschichtigen Platten, Zylindern und Kugeln vorgestellt. Dieses Modell beruht auf der endlichen Integraltransformation und dem Formalismus der Transfermatrix zur Lösung des homogenen Randproblems sowie des Eigenwertproblems. Letzteres ist im vorliegenden Fall nicht vom Sturm–Liouville-Typ. Es wird ein zuverlässiges Verfahren zur Berechnung der Eigenwerte im Zuge der numerischen Lösung vorgestellt. Dies ist erforderlich, weil herkömmliche Verfahren einen Verlust von Eigenwerten bei der Berechnung nicht vermeiden können.

#### НЕСТАЦИОНАРНЫЙ ТЕПЛОПЕРЕНОС В МНОГОСЛОЙНЫХ КОМПОЗИТНЫХ СРЕДАХ И ЗАДАЧА НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ—I. ЕДИНИЧНАЯ МНОГОСЛОЙНАЯ СТЕНКА

**Аннотация**—Предложена аналитическая модель нестационарного теплопереноса в одномерных многослойных плитах, цилиндрах и сферах. Модель, основанная на конечном интегральном преобразовании и формализме матрицы переноса, используется для решения граничной однородной задачи и задачи на собственные значения, не являющейся в данном случае задачей типа Штурма–Лиувилля. Поскольку применение обычных методов не позволяет избежать потери собственных значений в ходе расчетов, предложена надежная методика расчета собственных значений, позволяющая найти численное решение.